25/2 (9)

Εξίσωση Riccati

$y'(x) + \alpha(x)y(x) + \beta(x)y^2(x) + d(x) = 0 \quad (E)$

Προσοχή στο πεδίο ορισμού του z (να μην μηδενίζεται στο Π.Ο. της)

Αν y_1 μερική λύση της (E) τότε η αντικατάσταση
$y = y_1 + \frac{1}{z}$, ανάγει την (E) σε γραμμ. εξ. α' τάξης με $z \neq 0$

Είναι $y' = y_1 + \frac{z'}{z^2}$ και $y_1' - \frac{z'}{z^2} + \alpha(x)y_1 + \alpha(x)\frac{1}{z} + \beta(x)\left(y_1^2 + \frac{1}{z^2} + \frac{2y_1}{z}\right) + d(x) = 0$

$\Leftrightarrow \left[y_1' + \alpha(x)y_1 + \beta(x)y_1^2 + d(x)\right] - \frac{z'}{z^2} + \alpha(x)\frac{1}{z} + \beta(x)\frac{1}{z^2} + \frac{2y_1\beta(x)}{z} = 0$

$\Leftrightarrow \quad z' - \alpha(x)z - \beta(x) - 2y_1\beta(x)z = 0$

$z' - \left[\alpha(x) + 2\beta(x)y_1\right]z = \beta(x)$ που είναι α' τάξης

Πχ.1

$y' - \frac{1}{x}y - x^3y^2 + x^5 = 0$, $y = x$ λύση

$y = x + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = 1 - \frac{z'}{z^2} \rightsquigarrow \boxed{z' + (2x + \frac{1}{x}z) = -x^3}$

$z(x) = e^{-\int(2x^4+\frac{1}{x})dx}\left[c + \int(-x^3)e^{\int(2x^4+\frac{1}{x})dx}\right]$

$z(x) = e^{-\frac{2x^5}{5} - \ln|x|}\left[c - \int x^3 e^{\frac{2x^5}{5} + \ln|x|}dx\right]$ $\quad |x| = x\,\mathrm{sgn}(x)$

$= \int x^4 \mathrm{sgn}(x) e^{\frac{2x^5}{5}}dx = \mathrm{sgn}(x)\int x^4 e^{\frac{2x^5}{5}}$

Απάντηση

$z(x) = \frac{c}{|x|}e^{\frac{2x^5}{5}} - \frac{1}{2x}$ στο $S = \left\{y = x + \frac{1}{\frac{c}{|x|}e^{\frac{2x^5}{5}} - \frac{1}{2x}}\right\} \cup \{x\}$

Άσκηση 6iii

$y' + xy = y^3e^{x^2}$ με $y(0) = \frac{1}{2}$

$z = y^{1-3} \Rightarrow z - y^{-2} = 0 \Rightarrow z' = -2y^{-3}y' \Rightarrow y^3y' = \frac{z'}{4} \Rightarrow z(x) = \frac{1}{y^2(x)}$

Άρα $y^{-3}y' + xy^{-2} = e^{x^2}$ με

$\frac{z'}{-2} + xz = e^{x^2} \Rightarrow z' - 2xz = -2e^{x^2} \Rightarrow$ $\quad z(0) = \frac{1}{y^2(0)} = 4$

$\Rightarrow z(x) = e^{-\int_0^x -2s\,ds}\left(z(0) + \int_0^x(-2e^{s^2}) \cdot e^{\int_0^s(-2u)du}ds\right)$

όπου $4 - 2x > 0 \Rightarrow x < 2$

$\Rightarrow z(x) = 4e^{x^2} - 2xe^{x^2}$

Άρα $y(x) = \frac{1}{\sqrt{z(x)}} \Rightarrow y(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x(4-2x)}}$

Ασκ. το Φυλλάδιο Λυ. Σελ. 14

$y' = (x^2+y+1)(x^2+y-\frac{3}{2}) + 1 - 2x \quad (y_1 = \lambda - x^2)$ για $\lambda_1 = 1 \rightsquigarrow y_1 = 1 - x^2$

άρα $y = 1 - x^2 + \frac{1}{z}$

$-2x = (x^2+\lambda-x^2)(x^2+\lambda-x^2-\frac{3}{2}) + 1 - 2x$

$0 = (\lambda+1)(\lambda-\frac{3}{2}) + 1 \quad \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$-2x - \frac{z'}{z^2} = (x^2+1-x^2+\frac{1}{z}+1)(x^2+1-x^2+\frac{1}{z}-\frac{3}{2}) + 1 - 2x$

$-\frac{z'}{z^2} = (2+\frac{1}{z})(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}) + 1 \Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = \frac{2}{z} - 1 + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{2z} + 1$

$\lambda_1 = 1 \rightsquigarrow S_1 = \{y(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{ce^{-\frac{3}{2}x} - \frac{2}{3}}\} \cup \{1 - x^2\}$

$\lambda_2 = -\frac{1}{2} \rightsquigarrow S_2 = \{y(x) = -\frac{1}{2} - x^2 + \frac{1}{ce^{\frac{3}{2}x} + \frac{2}{3}}\} \cup \{y_2 = -\frac{1}{2} - x^2\}$

$y(x) = 1 - x^2 + \frac{1}{ce^{-\frac{3}{2}x} - \frac{2}{3}} = -\frac{1}{2} - x^2 + \frac{3}{2} + \frac{1}{ce^{-\frac{3}{2}x} - \frac{2}{3}} = \dots =$

$= \frac{1}{\frac{2}{3}c - \frac{4}{3 \cdot 3c} e^{\frac{3}{2}x}}$ Δηλαδή για $c_1 = -\frac{4}{9c}$ τα S_1 κ S_2 είναι ίδια σύνολα λύσεων

(*) Άρα για ένα λ (οποιοδήποτε) θα βρούμε το ίδιο σύνολο λύσεων με τα άλλα λ. Δεν χρειάζεται να εξετάσουμε για όλα τα λ (θέλει απόδειξη)

Πχ. 2 σελ. 35

$y' - y + e^{-x}y^2 - e^{-x} = 0 \qquad y_1 = ke^{\lambda x}$

Θα πρέπει: $k(\lambda-1)e^{\lambda x} + [k^2 e^{2(\lambda-1)x} - 1]e^{x} = 0 \quad \forall k, \lambda \in \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Ασκ. 5iii}}$ $\boxed{\text{Φυλλάδιο}}$

Να λυθεί: $y' - y + e^{-x}y^2 - e^{-x} = 4e^{x}, \quad y_1 = ke^{\lambda}$